

HUSTOTA OBYVATEĽSTVA

Pri formulovaní úloh nebola naším cieľom práca s približnými číslami, preto s údajmi o počte obyvateľov a rozlohe počítame tak, ako by to boli presné čísla (hoci napr. rozlohy krajín sú v skutočnosti zaokrúhlené na celé kilometre; navyše sa rozlohy krajín a počty obyvateľov v rôznych zdrojoch líšia).

Tému možno rozdeliť na dve samostatné časti:

- V úlohách 1 – 3 sa sústreďujeme na definíciu pojmu hustota obyvateľstva.
- Úlohy 4 – 6 skúmajú vzťah medzi percentuálnymi zmenami počtu obyvateľov, rozlohy krajiny a hustoty obyvateľstva.

1. V roku 2007 bola hustota obyvateľstva na Slovensku približne 111 obyv./km², v Česku približne 132 obyv./km².

$$\frac{5\,448\,000}{49\,035} = 111,1\dots \approx 111, \quad \frac{10\,381\,000}{78\,866} = 131,6\dots \approx 132$$

2. **približne 121 obyv./km²**

V krajinách V4 žilo v roku 2007 spolu približne 64 400 000 obyvateľov na celkovej rozlohe 533 617 km², delením dostaneme $64\,400\,000 : 533\,617 = 120,68\dots \approx 121$.

3. **nesprávny**

Petrovým postupom dostaneme výsledok

$$\frac{111+132}{2} = 121,5 \approx 122 \text{ obyvateľov na km}^2.$$

Správny výsledok dostaneme, ak celkový počet obyvateľov Česko-Slovenska vydelíme jeho celkovou rozlohou:

$$\frac{5\,448\,000 + 10\,381\,000}{49\,036 + 78\,866} = 123,75\dots \approx 124 \text{ obyvateľov na km}^2.$$

Táto úloha môže byť podnetom na diskusiu o tom, kedy by bol Petrov výsledok správny. Nastane to len v dvoch prípadoch: ak majú obidve krajiny rovnakú hustotu obyvateľstva alebo ak majú rovnakú rozlohu. Na obidve tieto možnosti by mohli prísť žiaci sami.

4. **Hustota obyvateľstva sa zvýši o 7 %.**

Označme počet obyvateľov p , rozlohu r . Potom hustota je $h = \frac{p}{r}$. Po náraste počtu obyvateľstva o 7 % bude nový počet obyvateľov $1,07p$. Preto nová hustota obyvateľstva bude

$$h_n = \frac{1,07p}{r} = 1,07 \cdot \frac{p}{r} = 1,07 \cdot h.$$

To znamená, že h_n je 107 % z čísla h , teda je o 7 % väčšie ako h .

Poznámka. V úlohe nie je potrebné poznať počet obyvateľov. Ak by žiakom úloha bez konkrétnych čísel spôsobovala problémy, je možné ju vyriešiť s konkrétnym počtom obyvateľov, a potom diskutovať o tom, či a prečo dostávame pre rôzne počty obyvateľov rovnaký výsledok.

5. **Hustota obyvateľstva by sa zmenšila približne o 16 %.**

Označme počet obyvateľov Nórska p , jeho rozlohu bez Špicbergov a ostrova Jan Mayen r . Potom hustota obyvateľstva je $h = \frac{p}{r}$. Ak započítame aj rozlohu uvedených ostrovov, bude nová rozloha $r_n = 1,19 \cdot r$, počet obyvateľstva sa nezmení. Nová hustota bude



$$h_n = \frac{p}{1,19 \cdot r} = \frac{1}{1,19} \cdot \frac{p}{r} = 0,840\ 336 \dots \cdot \frac{p}{r} \approx 0,84 \cdot h.$$

Číslo h_n je približne 84 % z čísla h , je teda približne o 16 % menšie.

Poznámka. Na vyriešenie úlohy žiaci nepotrebujú poznať počet obyvateľov Nórska ani jeho rozlohu. Ak sa im úloha bez týchto údajov zdá príliš náročná, môže učiteľ nechať žiakov zistiť príslušné údaje a využiť ich pri riešení (komplikácie môžu nastať pri zisťovaní rozlohy Nórska, pretože nie všetky zdroje uvádzajú, či v rozlohe sú alebo nie sú zarátané niektoré územia). V takom prípade by žiaci mali skontrolovať, či započítanie uvedených ostrovov skutočne zväčší rozlohu o 19 %. Nasledovať by mala diskusia o tom, či spomínané údaje sú skutočne potrebné na vyriešenie úlohy.

6. Celková hustota obyvateľstva sa zmenšila približne o 4 %.

Označme pôvodný počet obyvateľov Rakúsko-Uhorska p a jeho pôvodnú rozlohu r . Potom pôvodná hustota je $h = \frac{p}{r}$. Nový počet obyvateľov je $1,04p$, nová rozloha $1,08r$, preto nová hustota je

$$h_n = \frac{1,04p}{1,08r} = \frac{1,04}{1,08} \cdot \frac{p}{r} = 0,962\ 962 \dots \cdot h \approx 0,96 \cdot h.$$

To znamená, že nová hustota je približne o 4 % menšia ako pôvodná.

Poznámka 1. Riešenia úloh 5 a 6 môžu byť východiskom diskusie o približných výpočtoch. Nechajte žiakov riešiť úlohu 6, v ktorej hodnoty 4 % a 8 % nahradíte kombináciou iných malých čísel. Potom nech sa zamyslia, či na získaných výsledkoch nie je niečo nápadné. Mali by (s vašou prípadnou pomocou) zistiť toto: Ak p zväčšíme o x % a r zväčšíme o y %, tak podiel $\frac{p}{r}$ sa

- zväčší približne o $x - y$ %, ak $x > y$,
- zmenší približne o $y - x$ %, ak $x < y$.

Ak zmenšenie budeme chápať ako „záporné zväčšenie“, môžeme toto pozorovanie sformulovať jednoduchšie: podiel $\frac{p}{r}$ sa zväčší o $x - y$ % (teda napr. pre $x = 1$, $y = 3$ dostaneme približné zväčšenie o $1 - 3 = -2$ %, t.j. zmenšenie približne o 2 %).

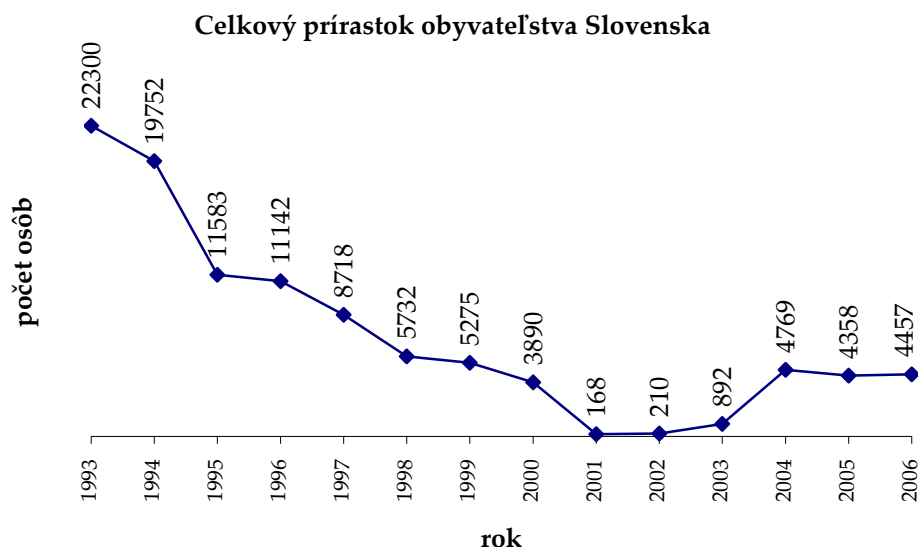
Ďalším krokom by mala byť diskusia o tom, či toto pozorovanie platí všeobecne, alebo len pre malé hodnoty x a y . Tu možno využiť výsledok úlohy 5 (ideálne by bolo, keby na to prišli žiaci sami), v ktorom toto pozorovanie už neplatí. Počet obyvateľov sa zväčšil o 0 %, plocha o 19 %, ale podiel sa zmenšil len o 16 %. Ak tento príklad žiakov nepresvedčí (napr. kvôli zväčšeniu o 0 % v čitateli), môžu sami objaviť iný. Ak ich to zaujme, môžu skúsiť objaviť hranice, v ktorých sa musí pohybovať x a y , aby ešte približný odhad pomocou $x - y$ % bol správny. Pri riešení tejto úlohy odporúčame použiť tabuľkový procesor, napr. EXCEL.

Poznámka 2. Ďalším možným námetom je vzťah medzi prírastkom obyvateľstva a zmenou hustoty. Uvádzame príklad takejto úlohy.

Hustota obyvateľstva Slovenska vypočítaná z počtu jeho obyvateľov k 31.12.1995 bola

$$h_{1995} = 109,468\ 542 \dots \approx 109 \text{ obyvateľov na km}^2.$$

Na nasledujúcom grafe je znázornený celkový prírastok obyvateľstva v rokoch 1993 – 2006. Napríklad celkový prírastok obyvateľstva v roku 1993 (číslo 22 300) je rozdiel medzi počtom obyvateľov k 31.12.1993 a ich počtom k 31.12.1992.



Vypočítajte hustotu obyvateľstva Slovenska na konci roka 1997 a na konci roka 1993. Výsledok zaokrúhľite na celé čísla.

Uvedieme dva spôsoby riešenia:

1. Z hustoty 109,468 542... možno zistiť počet obyvateľov Slovenska k 31.12.1995, ten označíme p_{1995} :

$$\frac{p_{1995}}{49\,035} = 109,468\,542 \dots, \quad \text{odtiaľ} \quad p_{1995} \approx 49\,035 \cdot 109,468\,542 = 5\,367\,789,956\,97,$$

preto $p_{1995} = 5\,367\,790$.

(V zadaní sme vedome uviedli hustotu natoľko presne, aby sa z nej číslo p_{1995} dalo určiť jednoznačne, pozri druhú odrážku za riešením tejto úlohy.)

Z hodnoty p_{1995} a celkových prírastkov obyvateľstva vypočítame počet obyvateľov Slovenska k 31.12.2000 a k 31.12.1993:

$$p_{1997} = p_{1995} + 11\,142 + 8\,718 = 5\,387\,650,$$

$$p_{1993} = p_{1995} - 11\,583 - 19\,752 = 5\,336\,455.$$

Potom hľadané hustoty obyvateľstva sú

$$h_{1997} = \frac{p_{1997}}{49\,035} = \frac{5\,387\,650}{49\,035} = 109,873 \dots \approx 110 \text{ obyv./km}^2,$$

$$h_{1993} = \frac{p_{1993}}{49\,035} = \frac{5\,336\,455}{49\,035} = 108,829 \dots \approx 109 \text{ obyv./km}^2.$$

2. Výsledok vieme nájsť aj bez toho, aby sme počítali počet obyvateľov v rokoch 2000 a 1993. Ak sa počet obyvateľov zväčší o x , tak hustota sa zväčší o $\frac{x}{49\,035}$ obyv./km². Za roky 1996 a 1997 sa počet obyvateľov zväčšil o

$$x = 11\,142 + 8\,718 = 19\,860.$$

Hustota sa potom zväčšila o

$$\frac{19\,860}{49\,035} = 0,405\,016 \dots, \quad (*)$$

preto na konci roka 1997 bola

$$h_{1997} = h_{1995} + 0,405\,016 \dots \approx 109,873\,558 \approx 110 \text{ obyv./km}^2.$$

Oproti stavu na konci roka 1995 bolo na Slovensku koncom roka 1993 o

$$11\,583 + 19\,752 = 31\,335$$



obyvateľov menej. Hustota bola preto menšia o

$$\frac{31\,335}{49\,035} = 0,639\,033 \dots, \quad (**)$$

teda mala hodnotu

$$h_{1993} = h_{1995} - 0,639\,033\dots \approx 108,829\,509 \approx 109 \text{ obyv./km}^2.$$

Túto úlohu možno využiť na diskusiu o tom, ako zaokrúhľovanie medzivýsledkov môže ovplyvniť správnosť celkového výsledku:

- Keby sme v riešení 1. počítali číslo p_{1995} nie z hodnoty $h_{1995} = 109,468\,542\dots$, ale zo zaokrúhleného čísla $h_{1995} \approx 109$, dostali by sme

$$p_{1995} = 49\,035 \cdot 109 = 5\,344\,815,$$

odtiaľ

$$p_{1997} = p_{1995} + 19\,860 = 5\,364\,675, \quad p_{1993} = p_{1995} - 31\,335 = 5\,313\,480.$$

Z týchto počtov obyvateľov by sme dostali hustoty obyvateľstva

$$h_{1997} = \frac{p_{1997}}{49\,035} = \frac{5\,364\,675}{49\,035} = 109,405\dots \approx 109, \quad h_{1993} = \frac{p_{1993}}{49\,035} = \frac{5\,313\,480}{49\,035} = 108,360\dots \approx 108.$$

Ako vidíme, ani jeden z týchto výsledkov nie je správny.

- V predchádzajúcej odrážke sme videli, že zaokrúhlením hustoty obyvateľstva na celé čísla sme získali nesprávne výsledky. Prirodzená otázka potom je: odkiaľ sme si istí, že číslo $p_{1995} = 5\,367\,790$, ktoré sme vypočítali v riešení 1., je správny celkový počet obyvateľov?

Číslo $h_{1995} = 109,468\,542\dots$ leží medzi číslami $109,468\,542$ a $109,468\,543$, preto skutočný počet obyvateľov musí ležať medzi číslami

$$49\,035 \cdot 109,468\,542 = 5\,367\,789,956\,97 \quad \text{a} \quad 49\,035 \cdot 109,468\,543 = 5\,367\,790,006\,005.$$

Túto podmienku spĺňa jediné číslo: $5\,367\,790$.

Ak to učiteľ uzná za vhodné, môže nechať žiakov vyskúšať, ako presne by sme vedeli počet obyvateľov zistiť, keby sme hustotu h_{1995} poznali na 5, 4, 3, ... desatinné miesta.

Pre učiteľov, ktorí chcú graf celkových ročných prírastkov pred úlohou 7 použiť na ďalšie úlohy, ešte doplňujúca informácia: počet obyvateľov k 31.12.2001 sa nerovná súčtu počtu obyvateľov k 31.12.2000 a celkového prírastku v roku 2001. Údaj o celkovom počte obyvateľov k 31.12.2001 bol totiž opravený podľa výsledkov sčítania ľudu v roku 2001 a je $5\,378\,951$. Údaje pre nasledujúce roky možno opäť vypočítať z tejto hodnoty a celkového prírastku.